



[문제 1-1]

$x - \cos x = f(x)$ 라 하면 $f'(x) = 1 + \sin x \geq 0$ 이므로 $x - \cos x$ 는 실수 전체에서 증가한다.

i) $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

이 범위에서 $\cos x > 0$ 이므로 $x - \cos x < x$ 이고,

$x - \cos x \geq 0 - \cos 0 = -1$, $x < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $-1 \leq x - \cos x < x < \frac{\pi}{2}$ 이다.

$[-1, \frac{\pi}{2}]$ 에서 $\sin x$ 는 증가함수이므로

$\sin(x - \cos x) < \sin x$ 이다.

ii) $x = \frac{\pi}{2}$

이때 $\cos x = 0$ 이므로 $\sin(x - \cos x) = \sin x$ 이다.

iii) $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$

이 범위에서 $\cos x < 0$ 이므로 $x - \cos x > x$ 이고,

$x - \cos x \leq \pi - \cos \pi = \pi + 1$, $x > \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\frac{\pi}{2} < x < x - \cos x \leq \pi + 1$ 이다.

$(\frac{\pi}{2}, \pi + 1]$ 에서 $\sin x$ 는 감소함수이므로

$\sin(x - \cos x) < \sin x$ 이다.

따라서 $[0, \pi]$ 에서 $\sin(x - \cos x) \leq \sin x$ 이고,

등호는 $x = \frac{\pi}{2}$ 일때 성립한다.



[문제 1-2]

먼저 $\sin(-x) = -\sin x$, $(-x) = -x$ 이니 $\sin x$ 은 기함수.

$\cos(-x) = \cos x$ 이니 $\cos x$ 은 우함수이다.

적분범위가 0에 대해 대칭이므로 기함수의 적분값은 상쇄되고,

우함수는 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) dx = 2 \int_0^{\pi/2} f(x) dx$ 가 된다.

1. $\cos^2 x$ 는 기함수 \times 우함수 = 기함수.

2. $\cos x$ 도 기함수 \times 우함수 = 기함수.

$\sin x$ 도 기함수이니

따라서 적분값은 전체 0이 기함수이다. 이를 $g(x)$ 라 하면

$$\text{우함수인 } g(x) \text{에 대해 } \int_{-\pi/2}^{\pi/2} g(x) dx = \int_0^{\pi/2} g(x) dx + \int_{-\pi/2}^0 g(x) dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} g(x) dx - \int_0^{\pi/2} g(x) dx = 0 \text{ 이 된다.}$$



[문제 1-3]

먼저 $f(x)$ 는 기함수, 우함수 - 기함수 = 기함수이다.

$2xf(x)$ 와 $\cos 2x$ 는 우함수,

$2x \pm 2xf(x) - \cos 2x - f(x)$

$= 4x^2f(x) - 2x\cos 2x - f(x)$ 는 각 항이 모두 기함수라 역시 기함수이다.

따라서 준 N_1 은 $2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{2xf(x) - \cos 2x\} dx$ 와 같다.

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{2xf(x) - \cos 2x\} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8x^2 \cos 2x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4x \sin 2x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx$$

$$= [4x^2 \sin 2x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8x \sin 2x dx - \left[4x(-\cos x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4(-\cos x) dx$$

$$- \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 0 - \left\{ [8x(-\frac{1}{2}\cos 2x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8(-\frac{1}{2}\cos 2x) dx \right\}$$

$$- (0 - [-4\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{2}}) - 0$$

$$= - \left\{ 8 \cdot \frac{\pi}{2} (-\frac{1}{2})(-1) + [4(\frac{1}{2}\sin 2x)]_0^{\frac{\pi}{2}} \right\} - 4 \cdot 1$$

$$= -2\pi - 4$$



[문제 2-1]

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B,$$

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B \text{ 이므로}$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} \{ \cos(A-B) - \cos(A+B) \} \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } \sin t \sin \left(\frac{\pi}{3} - t \right) = \frac{1}{2} \{ \cos(2t - \frac{\pi}{3}) - \cos \frac{\pi}{3} \}$$

$$= \frac{1}{2} \cos(2t - \frac{\pi}{3}) - \frac{1}{4}.$$

$$\{a, b, c, d\} = \left\{ \frac{1}{2}, 2, -\frac{\pi}{3}, -\frac{1}{4} \right\} \text{ 이다.}$$

4



[문제 2-2]

$\overline{AR} = \overline{BP} = \overline{CQ} = a$, $\overline{RP} = \overline{PQ} = \overline{QR} = b$ 라 하자.

$\angle PBA = \frac{\pi}{3} - t$ 이니 $\angle APB = \frac{2}{3}\pi$ 이다.

이제 $\triangle ABP$ 에서 사인법칙에 의해

$$\frac{1}{\sin \frac{2}{3}\pi} = \frac{a}{\sin t} = \frac{a+b}{\sin(\frac{\pi}{3}-t)} \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } a = \frac{\sin t}{\sin \frac{2}{3}\pi} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin t, \quad b = \frac{2}{\sqrt{3}} \{ \sin t - \sin(\frac{\pi}{3}-t) \} \text{ 이다.}$$

$$S(t) = \frac{\sqrt{3}}{4} b^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{3} \{ \sin^2 t - 2 \sin t \sin(\frac{\pi}{3}-t) + \sin^2(\frac{\pi}{3}-t) \}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \{ \sin^2 t - \cos(2t - \frac{\pi}{3}) + \frac{1}{2} + \sin^2(\frac{\pi}{3}-t) \} \quad \dots (2-1 \text{에 의해})$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} S(t) dt = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(2t - \frac{\pi}{3}) dt + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} dt + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2(\frac{\pi}{3}-t) dt \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt - \left[\frac{1}{2} \sin(2t - \frac{\pi}{3}) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos 2(\frac{\pi}{3}-t)}{2} dt \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\left[\frac{1}{2} t - \frac{1}{4} \cos 2t \right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\} + \frac{\pi}{6} + \left[\frac{1}{2} t - \frac{1}{4} (-1) \cos 2(\frac{\pi}{3}-t) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{\pi}{6} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{1}{4} (0 - \frac{\sqrt{3}}{2}) \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{6} \pi - \frac{\sqrt{3}}{4}$$



[문제 2-3]

(1. ∞) 에서 $(x \ln x)' = \ln x + 1 > 0$, $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$ 이다

$(x \ln x)'_{x=1} = (\ln x)'_{x=1} = 1$ 이다. 이 점선의 방정식이 $y = x - 1$ 이므로

$P(t) = \int_1^t (x \ln x - x + 1) dx$, $Q(t) = \int_1^t (x - \ln x - 1) dx$ 이다. 이를 계산하면

$$\begin{aligned} P(t) &= \int_1^t x \ln x dx - \int_1^t x dx + \int_1^t dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_1^t - \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^t + [x]_1^t \\ &= \frac{1}{2} t^2 \ln t - \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^t - \frac{1}{2} (t^2 - 1) + t - 1 = \frac{1}{2} t^2 \ln t - \frac{1}{4} (t^2 - 1) - \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{2} + t - 1 \\ &= \frac{1}{2} t^2 \ln t - \frac{3}{4} t^2 + t - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(t) &= \int_1^t x dx - \int_1^t (1 + \ln x) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^t - [x \ln x]_1^t = \frac{1}{2} (t^2 - 1) - t \ln t \\ &= \frac{1}{2} t^2 - t \ln t - \frac{1}{2} \text{ 이다.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{따라서 } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P(t)}{tQ(t)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} t^2 \ln t - \frac{3}{4} t^2 + t - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} t^3 - t^2 \ln t - \frac{1}{2} t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln t}{2t} - \frac{3}{4t} + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{4t^3}}{\frac{1}{2} - \frac{\ln t}{t} - \frac{1}{2t^2}} \text{ 이다.} \end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{3}{4t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{4t^3} = 0 \text{ 이며, } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln t}{t} \text{ 에 대해 생각하면}$$

$$f(t) = \sqrt{t} - \ln t \ (t > 0) \text{ 이고 } f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{t} = \frac{\sqrt{t} - 2}{2t} \text{ 이니}$$

$f(t)$ 가 $t=4$ 일 때 극값이냐 최댓값 $f(4) = 2 - \ln 2$ 를 가진다. 즉,

(0. ∞) 에서 $f(t) = \sqrt{t} - \ln t \geq 2 - \ln 2 > 0$, $\sqrt{t} > \ln t$ 이다.

$t \rightarrow \infty$ 일 때 $0 < \ln t < \sqrt{t}$ 이니 $\frac{0}{t} \leq \frac{\ln t}{t} \leq \frac{\sqrt{t}}{t}$ 이다,

$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{0}{t} = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t}}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{t}} = 0$ 이니 경합 정리에 의해 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln t}{t} = 0$ 이다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P(t)}{tQ(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{0 - 0 + 0 - 0}{\frac{1}{2} - 0 - 0} = \frac{0}{\frac{1}{2}} = 0 \text{ 이다.}$$